Brauer 群的例子

卢维潇

更新：2022 年 10 月 11 日

1 域的 Brauer 群

回忆, 当 K 是一个域的时候, 我们有

$$\mathrm{Br}(K)=\{K\text{上中心单代数}\}/\text{等价}=\{K\text{上有限维中心除环}\}/\text{同构}=H^2(K,(K^{\mathrm{sep}})^\times)=H^2_{\text{ét}}(\operatorname{Spec}K,\mathbb{G}_m)$$

1.1 C_1 域的 Brauer 群

命题 1.1 若 K 是代数闭域, 则 $\mathrm{Br}\,K=0$.

证明. 由 K 上没有非平凡的有限维中心除环即得.

上述命题可以推广到更一般的**拟代数闭域**又称 C_1 **域**.

定义 1.1 一个域 K 称为 C_1 域或拟代数闭域, 若对任意正整数 $d<n$,d 次齐次多项式 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 具有非零解.

注 上述刻画等价于任意 $\mathbb{P}^n_k$ 中的 d 次曲面, 当 $d\le n$ 时存在有理点.

C_1 域有很多例子, 它们在某种意义上均离代数闭域不远.

例 1.1
- 有限域都是 C_1 域 (Chevalley-Warning 定理). 注意到, 此时有严格的界:$x_0^{p-1}+\cdots+x_{p-2}^{p-1}$ 没有有理点.
- X 是域 k 上的整曲线, 其中 k 是代数闭域, 则 $K(X)$ 是 C_1 域.(曾炯之定理)
- 设 K 是局部域, 则 K^{ur} 和 $\widehat{K^{\mathrm{ur}}}$ 均为 C_1 域.
- 更一般地, 设 R 是 Hensel 的离散赋值环, 且 R excellent, 且剩余类域是代数闭域, 则 R 的分式域 K 是 C_1 的.(Lang 定理)
- $\mathbb{R}$ 不是 C_1 域. (考虑 $x_1^2+\cdots+x_n^2$)

命题 1.2 C_1 域具有平凡的 Brauer 群.

证明. 假设 D 是 k 上的非平凡有限维中心除环,$\dim_k D = n^2$, 其中 $n > 1$ 为正整数.

考虑既约范数 $\mathrm{Nrd} : D \to k$, 这是一个次数为 n, 变量个数为 n^2 的多项式映射, 根据假设, 存在一个非零元的既约范数为 0. 这与每个非零元都可逆矛盾.

推论 $\mathrm{Br}(\mathbb{F}_p) = 0, \mathrm{Br}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}) = 0, \mathrm{Br}(\mathbb{C}(t)) = 0, \mathrm{Br}(\bar{\mathbb{F}}_p(t)) = 0.$

注 当 R 是具有代数闭的剩余类域的 Hensel 离散赋值环时, 记 K 为分式域 (不一定 excellent), 也有 $\mathrm{Br}(R) = 0$.

最后补充一条

命题 1.3 若 K 是可分闭域, 则 $\mathrm{Br}\, K = 0$

证明. 由于任何中心除环都在某个可分扩张上分裂.

推论 (Wedderburn 小定理) 有限除环是域, 有限单环是有限域上的矩阵环.

1.2 局部域的 Brauer 群

定理 1.4 (局部类域论) 设 k 是局部域, 则有

$$\mathrm{Br}(k) = \begin{cases} 0 & k = \mathbb{C} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & k = \mathbb{R} \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & k \text{ 非 Archimedes} \end{cases}$$

当 $k = \mathbb{R}$ 时, 上述事实即为 $\mathbb{R}$ 上的有限维可除代数为 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

当 k 是非 Archimedes 域时, 同构 $\mathrm{inv} : \mathrm{Br}(k) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 有以下映射给出:

$$H^2(k, k^{\mathrm{sep},\times}) \cong H^2(k^{\mathrm{ur}}/k, k^{\mathrm{ur},\times}) \to H^2(\bar{k}, \mathbb{Z}) \cong H^1(\bar{k}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

其中 $\bar{k}$ 代表 k 的剩余类域.

我们还有如下事实:

命题 1.5

1. 任何 k 上的中心单代数都是循环代数.(从循环扩张构造). 事实上 $A = L[x, \sigma]/(x^n - a)$. 其中 L/k 为 n 次非分歧扩张,a 为赋值为 m 的元素,σ 为 Frobenius. 则 $\mathrm{inv}(A) = m/n$
2. 中心单代数的周期与指标相等 (由上述事实即得).

例 1.2 当 $k \neq \mathbb{C}$ 时, 由上述定理即得到 $\mathrm{Br}(k)[2] = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 唯一一个非平凡 2 阶元对应 k 上唯一的非分裂四元数. 该非分裂四元数有更具体的描述:$k = \mathbb{R}$ 时即为~,k 非 Archimedes 时, 为 $\left(\frac{u, \pi}{k}\right)$, 其中 π 为 uniformizer,$k[\sqrt{u}]/k$ 为 k 的非分歧二次扩张.

1.3 整体域的 Brauer 群

定理 1.6 (整体类域论,Artin-Brauer-Hasse-Noether) 设 F 为整体域,v 是 F 的一个位, 则上面构造了同构 $\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}(F_v) \cong \mathbb{Q}Z$(或 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 或 0). 此时, 有短正合列

$$0 \to \mathrm{Br}(F) \to \bigoplus_v \mathrm{Br}(F_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

其中, 上述直和取遍 F 的所有位, 到 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的映射为 $\sum \mathrm{inv}_v$.

注 此时仍然有任何中心单代数均为循环代数, 且周期 = 指标.

上述定理说明，对于整体域 F, 给 F 上到中心单代数 A, 等价于对任意 F 的位 v, 给一个 F_v 上对中心单代数 F_v, 满足几乎处处分裂, 且 inv 之和为 0.

例 1.3 (整体域上的四元数) 上述短正合列给出

$$0 \to \mathrm{Br}(F)[2] \to \bigoplus_{v, v\text{不是复嵌入}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

从而给定 F 上的四元数代数等价于给定非复嵌入为位的全体的一个偶数阶子集.

例如 $\left(\frac{-1,-1}{\mathbb{Q}}\right)$ 对应 $2, \infty$.

2 留数同态

为了给计算一般概形的 Brauer 群做准备, 我们先引入留数同态.

设 R 为 DVR,K 为分式域,k 为剩余类域. 此时有赋值映射 $\mathrm{ord} : K^\times \to \mathbb{Z}$, 满足 $x \in R^\times \iff \mathrm{ord}(x) = 0$. 留数同态也为一个类似物, 它刻画了一个 $\mathrm{Br}(K)$ 什么时候来自于 $\mathrm{Br}(R)$ (回忆 R 是 Noether 正则整环, 从而 $\mathrm{Br}(R) \hookrightarrow \mathrm{Br}(K)$.

命题 2.1 存在映射 $\mathrm{res} : \mathrm{Br}(K) \to H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. 使得当 k 是完全域的时候, 有正合列

$$0 \to \mathrm{Br}(R) \to \mathrm{Br}(K) \to H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

注 当 k 不是完全域时, 上述正合列在 $\otimes\mathbb{Z}_{(p)}$ 后仍然正合.

res 的定义如下: 当 K 是完备的时候, 注意到 $K^{\mathrm{ur}} = 0$,res 由以下合成给出

$$\mathrm{Br}(K) \cong H^2(K^{\mathrm{ur}}/K, (K^{\mathrm{ur}})^\times) \to H^2(k, \mathbb{Z}) \cong H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

对于一般情形,res 定义为复合 $\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(\widehat{K}) \to H^1(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

对于非 DVR 的情形, 也有如下定理

定理 2.2 用 $X^{(1)}$ 代表 Noether 概形 X 的所有余 1 维的点

1. (Grothendieck) 设 X 为正则, 整的,1 维 Noether 概形, 且对于任意闭点 x,$k(x)$ 为完全域. 则有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}(X) \longrightarrow \mathrm{Br}\, K(X) \xrightarrow{\text{res}} \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^1(k(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

2. (Gabber) 设 X 为正则, 整,Noether 概形, 令 $S = \{p | p\text{为某个}x \in X^{(1)}\text{的剩余类域的特征}\}$. 则正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}(X) \longrightarrow \mathrm{Br}\, K(X) \xrightarrow{\text{res}} \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^1(k(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

在 $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(S)}$ 后正合.

注 在 Grothendieck 定理中, 也可以令 S 为那些具有不完全剩余类域的点, 上述复形在 $\otimes \mathbb{Z}_{(S)}$ 后正合.

在 Gabber 定理中, 我们也期待只需令 S 为那些不完全域的特征.

上述定理有如下直接的推论

推论 假设如上,$Z \subset X$ 是一个余维数 ≥ 2 的闭子集, 则 $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(U)$ 在 $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(S)}$ 后为同构.

推论 设 k 是特征为 p 的域,X, X' 是域 k 上点光滑, 整, 有限型概形, 且 X, X 双有理等价. 则 $\mathrm{Br}\, X$ 和 $\mathrm{Br}\, X'$ 在 $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ 后为同构. 若 $p = 0$, 则 $\mathrm{Br}\, X$ 和 $\mathrm{Br}\, X'$ 同构.

3 环与概形的 Brauer 群

3.1 Hensel 局部环的 Brauer 群

命题 3.1 设 R 为 Hensel 局部环 (例如 R 完备), 剩余类域是 k, 则有同构

$$\mathrm{Br}(R) \cong \mathrm{Br}(k)$$

证明. 由于有 site 的等价 $R_{\text{ét}} \cong k_{\text{ét}}$.

推论 1. 设 K 是非 Archimedes 局部域,$\mathcal{O}_K$ 为整数环. 则 $\mathrm{Br}\, \mathcal{O}_K = 0$.

2. $\mathrm{Br}(k[[t]]) \cong \mathrm{Br}(k)$ 对任意域 k 成立.

3.2 整体域相关的 Brauer 群

命题 3.2 设 K 为数域, 则有

$$\mathrm{Br}\, \mathcal{O}_K = \begin{cases} 0 & K\text{纯虚} \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r-1} & K\text{存在实嵌入,}r\text{为实嵌入的个数.} \end{cases}$$

证明. 由 Grothendieck 正合列和整体域的 Brauer 群比较即得.

更一般地, 设 K 是整体域,S 为包含 Archimedes 位的所有位的一个子集,$\mathcal{O}_{K,S}$ 为对应的 S-整数环. 则有正合列

$$0 \to \operatorname{Br} \mathcal{O}_{K,S} \to \bigoplus_{v \in S} \operatorname{Br} K_v \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

例 3.1

$\operatorname{Br}(\mathbb{F}_q) = 0, \operatorname{Br}(\mathbb{F}_q[t]) = 0, \operatorname{Br}(\mathbb{F}_q[[t]]) = 0, \operatorname{Br}(\mathbb{F}_q(t))$ 为大群, $\operatorname{Br}(\mathbb{F}_q((t)) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \operatorname{Br} \mathbb{F}_q[t, 1/t] = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

$\operatorname{Br}(\mathbb{Z}) = 0, \operatorname{Br}(\mathbb{Q})$ 为大群, $\operatorname{Br}(\mathbb{Z}_p) = 0, \operatorname{Br}(\mathbb{Z}[1/p]) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \operatorname{Br} \mathbb{Q}_p = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \operatorname{Br} \mathbb{Z}[\mathrm{i}] = 0, \operatorname{Br} \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

且上述例子的 Brauer 群和 Brauer-Azumaya 群同构

3.3 代数簇的 Brauer 群

命题 3.3 设 k 是代数闭域,X/k 是一个光滑射影曲线, 则 $\operatorname{Br} X = 0$

证明. 注意到 X 诺特, 整, 正则, 从而 $\operatorname{Br} X \hookrightarrow \operatorname{Br} K(X)$, 而根据曾炯之定理,$\operatorname{Br} K(X) = 0$.

注 该结论在计算曲线的平展上同调时非常重要.

注 事实上,Grothendieck 利用 fppf 上同调证明了只需假设 k 是可分闭域即可.

命题 3.4 k 为任意一个域, 则有 $\operatorname{Br} \mathbb{P}_k^n \cong \operatorname{Br} k$

证明. 首先我们证明 $n = 1$ 的情形. 当 k 是可分闭域时, 两者均为 0(由以前的结论). 对于一般的情形, 回忆由 Hochschild-Serre 谱序列给出正合列

$$0 \to \operatorname{Pic} \mathbb{P}_k^n \to \operatorname{Pic}(\mathbb{P}_{k^s}^n)^{\Gamma_s} \to \operatorname{Br} k \to \operatorname{Br}_1(\mathbb{P}_k^n) \to H^1(k, \operatorname{Pic}(X^s)) \to H^3(k, \mathbb{G}_m)$$

此时 $\operatorname{Br}_1(\mathbb{P}_k^n) = \operatorname{Br}(X)$.

为了证明一般情形, 我们需要一个引理

引理 3.5 设 $\pi : X \to B$ 是 Noether, 整, 正则概形之间的态射,$s : B \to X$ 是一个截面, 且一般纤维 $\cong \mathbb{P}_{K(B)}^1$. 则 $\pi^* : \operatorname{Br} B \to \operatorname{Br} X$ 为同构.

证明. 由交换图表即看出.

接下来继续证明原命题

续. 有理映射 $\mathbb{P}_k^n \to \mathbb{P}_k^{n-1}$ 可以延拓为映射 $\pi : X \to \mathbb{P}_k^{n-1}$.

从而有同构 $\operatorname{Br} X \to \operatorname{Br} \mathbb{P}_k^{n-1}$, 再由双有理给出单射, 容易推出从而是同构.

命题 3.6 设 X 光滑, 整, 有限型.k 特征 0, 且 X 为有理簇. 则 $\operatorname{Br} k \cong \operatorname{Br} X$.